



TITLE:

# Magneticな不純物がある超伝導体のorder parameterの空間的变化III

AUTHOR(S):

北村, 豊幸

---

CITATION:

北村, 豊幸. Magneticな不純物がある超伝導体のorder parameterの空間的变化III. 物性研究 1969, 12(3): 163-177

ISSUE DATE:

1969-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/87170>

RIGHT:

# Magnetic な不純物がある超伝導体の order parameter の空間的变化 Ⅲ

東教大理 北 村 豊 幸

( 4 月 3 0 日 受 理 )

## § 1 序

原点に一個の magnetic impurity がある超伝導体の order parameter の,  $r \gg \xi_0$  ( $\xi_0$ : coherence length  $= v_F / 2\pi T_C$ ;  $v_F$ : Fermi velocity,  $T_C$ : 遷移温度) での空間的变化について, 前論文で議論して来た。第一論文では, Nagaoka decoupling<sup>1)</sup> を超伝導体に拡張し, 逐次近似の方法によって, Kondo 効果が入る最低次  $J^3$  の order までを exact に求めた。第二論文では, Kawamura<sup>2)</sup> の多時間 Green 関数の方法により, most divergent term をすべて拾った。以上の議論は,  $T_C \gg T_K$  の場合であり,  $T_C \lesssim T_K$  の場合の振舞いも興味がある。ここで  $T_K$  は Kondo 温度である。

s-d 相互作用の Nagaoka decoupling の範囲における normal 状態の理論は, Bloomfield and Hamann<sup>4)</sup> や Zittartz and Müller Hartmann<sup>5)</sup> によって singular integral の方法を駆使して, exact solution が出された。同様の手法で super 状態についても, 全温度領域にわたって, Takano and Matayoshi<sup>6)</sup> や Kondo<sup>7)</sup> によって, bound state の問題をめぐって議論された。

order parameter の空間的变化の議論も, 当然, singular integral の手法を援用出来る。この論文では, 任意関数が exact に決められるという意味で, Z-M, 及び Kondo<sup>7)</sup> の方法に従い, さらに簡単のため,  $T_C$  の極近傍の議論を行なう。その場合でも exact に求めるのは非常に困難のため, state density として Lorentzian をとり, その幅を  $D$  としたとき,  $\omega < D$  においては state density の変化は小さく, 又  $\omega \gtrsim D$  においては phase modulation によって, その範囲の効果はきかないから, state density を Fermi 面におけるそれにおきかえる。この近似のもとに,  $\ln T_K / T = \tau$

北村豊幸

として,  $|\tau| \gg 1$  の場合,  $(1/\tau)^3$  の order までを exact に求める。

その結果,  $T_c$  の減少は, Zuckermann<sup>8)</sup> に類似し,  $T_K \gg T_c$  の方が,  $T_K \ll T_c$  の場合より, Cooper pair がこわれやすいことを示している。従って, order parameter の減少も, 前者の場合が大きいことを示すことが出来る。

以下, § 2 では, 空間的变化を考慮して, Nagacka decoupling を超伝導体に拡張し,  $\hat{t}(\omega)$  - matrix を求める。§ 3 では, § 2 で求めた  $t(\omega)$  を  $\Delta$  について一次まで,  $|\tau| \gg 1$  の近似のもとに  $(1/\tau)^3$  の order までを exact に求める。§ 4 では, それを使って, I での議論と同様に, Heinrichs<sup>9)</sup> に従って,  $\Delta(r)$  の積分方程式の解を第一次近似として求める。

## § 2 Formulation

原点に, 一個の magnetic impurity がある, 運動方程式は, I で議論したように,

$$\left(\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \Delta(r)\tau_1\right) \hat{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{J}{2} \delta(\mathbf{r}) \hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \left(\omega + \frac{\nabla^2}{2m}\tau_3 + \Delta(r)\tau_1\right) \hat{\Gamma}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ - J \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \hat{\Gamma}_\omega(0, \mathbf{r}') + \frac{J}{2} \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \hat{G}_\omega(0, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで,  $\tau_1, \tau_3$  は Pauli matrix であり, double time Green's 関数は,

$$\hat{G}(x, x') = \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_\uparrow(x); \phi_\uparrow^+(x') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\uparrow(x); \phi_\downarrow(x') \rangle\rangle \\ \langle\langle \phi_\downarrow^+(x); \phi_\uparrow^+(x') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\downarrow^+(x'); \phi_\downarrow(x) \rangle\rangle \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\hat{\Gamma}(x, x') = \begin{pmatrix} \langle\langle \phi_\uparrow S_z + \phi_\downarrow S_-; \phi_\uparrow^+(x') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\uparrow S_z + \phi_\downarrow S_-; \phi_\downarrow(x') \rangle\rangle \\ \langle\langle \phi_\downarrow^+ S_z - \phi_\uparrow^+ S_-; \phi_\uparrow^+(x') \rangle\rangle & \langle\langle \phi_\downarrow^+ S_z - \phi_\uparrow^+ S_-; \phi_\downarrow(x') \rangle\rangle \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \langle \phi_{\uparrow}^+(0) \phi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle & \langle \phi_{\downarrow}(0) \phi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle \\ \langle \phi_{\uparrow}^+(0) \phi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}) \rangle & \langle \phi_{\downarrow}(0) \phi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}) \rangle \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r}) \quad (5)$$

$$\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = 3 \begin{pmatrix} \langle \phi_{\uparrow}^+(0) \phi_{\downarrow}(\mathbf{r}) S_- \rangle & \langle \phi_{\downarrow}(0) \phi_{\downarrow}(\mathbf{r}) S_- \rangle \\ \langle \phi_{\downarrow}^+(0) \phi_{\downarrow}^+(\mathbf{r}) S_+ \rangle & \langle \phi_{\uparrow}^+(0) \phi_{\downarrow}(\mathbf{r}) S_- \rangle \end{pmatrix} - S(S+1) \delta(\mathbf{r}) \quad (6)$$

今,

$$\mathcal{F}_Z G(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \{G(z+i\delta) - G(z-i\delta)\} dz \quad (7)$$

なる operator を使って, (5), (6) 式を書きかえれば,

$$\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) = \mathcal{F}_Z \hat{G}_Z(\mathbf{r}, 0) - \frac{1}{2} \delta(\mathbf{r}) \quad (8)$$

$$\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = 2 \mathcal{F}_Z \mathbf{r}_Z(\mathbf{r}, 0) - S(S+1) \delta(\mathbf{r}) \quad (9)$$

となる。effective な gap  $\Delta(\mathbf{r})$  を持った, pure super 状態の Green's 関数として

$$\left(\omega + \frac{\nabla^2}{2m} \tau_3 + \Delta(\mathbf{r}) \tau_1\right) \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (10)$$

を使えば, (1), (2) 式から

$$\hat{G}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{J}{2} \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}, 0) \hat{\Gamma}_{\omega}(0, \mathbf{r}') \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -J \int \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \cdot \hat{\Gamma}_{\omega}(0, \mathbf{r}') + \\ & \frac{J}{2} \int \hat{G}_{\omega}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \cdot \hat{G}_{\omega}(0, \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (12)$$

となり, (12) 式から,

$$\hat{\Gamma}_{\omega}(0, \mathbf{r}') = \frac{J}{2} \left\{ 1 + J \hat{N}(\omega) + \frac{J^2}{4} \hat{M}(\omega) \hat{G}_{\omega}^0(0, 0) \right\}^{-1} \cdot \hat{M}(\omega) \cdot \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}') \quad (13)$$

$$\equiv -\frac{2}{J} \hat{t}(\omega) \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}') \quad (14)$$

となる。(14) 式で  $\hat{t}(\omega)$  - matrix を定義する。 $\hat{M}(\omega)$ ,  $\hat{N}(\omega)$  は

$$\begin{aligned} \hat{M}(\omega) &= \int \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}) \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{r}) d^3r \\ &= -\frac{4}{J} \int \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}) \mathcal{Z}_{\omega} [\hat{t}(\omega') \hat{G}_{\omega'}^0(0, \mathbf{r})] d^3r - S(S+1) \hat{G}_{\omega}^0(0, 0) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{N}(\omega) &= \int \hat{G}_{\omega}^0(0, \mathbf{r}) \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{r}) d^3r \\ &= \int \hat{G}_{\omega}^0(0, 0) \mathcal{Z}_{\omega'} [\hat{G}_{\omega'}^0(0, \mathbf{r}) + \hat{G}_{\omega'}(0, 0) \hat{t}(\omega') \hat{G}_{\omega'}^0(0, \mathbf{r}')] d^3r \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{G}_{\omega}^0(0, 0) \end{aligned} \quad (16)$$

さらに上式を書き直して,

$$\hat{M}(\omega) = -\frac{4}{J} \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)}{\omega - \omega'} \hat{t}(\omega') \right] - S(S+1) \hat{G}(\omega) \quad (17)$$

$$\hat{N}(\omega) = \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)}{\omega - \omega'} \right] + \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)}{\omega - \omega'} \hat{G}(\omega') \hat{t}(\omega') \right] - \frac{1}{2} \hat{G}(\omega) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}(\omega) &= \left[ \hat{A}(\omega) + J \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)\}^2}{\omega - \omega'} \hat{t}(\omega') \right] \right]^{-1} \times \\ &\quad \left[ \frac{J^2}{4} S(S+1) \hat{G}(\omega) + J \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)}{\omega - \omega'} \hat{t}(\omega) \right] \right] \end{aligned} \quad (19)$$

ここで,

$$\hat{G}(\omega) = \hat{G}_{\omega}^0(0, 0) \quad (20)$$

$$\hat{A}(\omega) = 1 - \frac{J}{2} \hat{G}(\omega) - \frac{J^2}{4} S(S+1) \hat{G}^2(\omega) + J \mathcal{Z}_{\omega'} \left[ \frac{\hat{G}(\omega') - \hat{G}(\omega)}{\omega - \omega'} \right] \quad (21)$$

である。 $\hat{G}(\omega)$  は対称行列であり, consistent に,  $\hat{t}(\omega)$  - matrix も対

称行列にすることが出来る。そこで、

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = (a \pm b) \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

なる関係を使えば、

$$\begin{aligned} t(z) = & \left\{ \frac{J^2}{4} S(S+1) G(z) + J \mathcal{A}_\omega \left[ \frac{G(\omega) - G(z)}{z - \omega} t(\omega) \right] \right\} \\ & \times \left\{ A(z) + J \mathcal{A}_\omega \left[ \frac{(G(\omega) - G(z))^2}{z - \omega} t(\omega) \right] \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

となる。今までの計算は全温度領域に適用出来る。

以下では、 $T_c$  の極近傍の議論をしよう。そのため、normal 状態の Greens 関数  $F(\omega)$  を導入しよう。state density として Lorentzian をとれば、

$$\rho(\omega) = \frac{\rho D^2}{\omega^2 + D^2} \quad (24)$$

となる。ここで、 $\rho$  は Fermi surface における state density、 $D$  は band 幅を与える。こうして、

$$\begin{aligned} F(\omega)^\pm &= \int \frac{\rho(\xi)}{\omega \pm i\delta - \xi} d\xi \\ &= \frac{\pi \rho D}{z \pm iD} \end{aligned} \quad (25)$$

となり、 $F(\omega)$  は実軸上に cut を持ち、

$F_r(\omega) = F^+(\omega)$  を Fig. 1 のように、

第一 Riemann 面の上半面、及び、第二

Riemann 面の下半面で定義する。同様に、

$F_a(\omega) = F^-(\omega)$  は第一 Riemann 面の下半面、及び、第二 Riemann 面の上

半面で定義する。 $T_c$  の近傍を考える限り、 $G(\omega)$  の cut も実軸上にあり、

$\hat{G}(\omega)$  の off-diagonal 成分は、 $\Delta$  の一次まで考えて、self-consis-

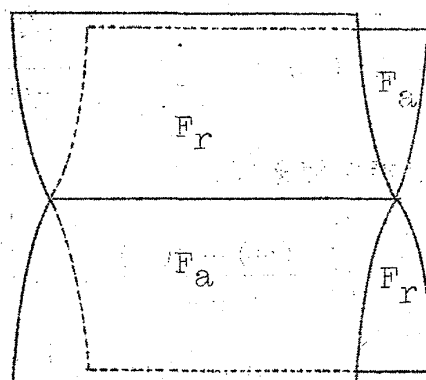


Fig. 1

北村豊幸

tent equation を得るために I で導入した

$$\begin{aligned}\Delta^{\pm}(\omega) &= \int F^{\mp}(-\omega) \Delta(r) F(\omega)^{\pm} d^3r \\ &= \int K_0(\omega \mp i\delta) \Delta(r) d^3r\end{aligned}\quad (26)$$

となる。今、(22) 式の + 成分を考えてやれば、 $F(\omega)$  の場合と同様に、

$$G(\omega)_{r,a} = F_{r,a}(\omega) + \Delta^{\pm}(\omega) \quad (27)$$

となる。こうして、

$$\begin{aligned}A(z) &= 1 - \frac{J}{2} G(z) - \frac{J^2}{4} S(S+1) G^2(z) + J \mathcal{J}_{\omega} \left[ \frac{G(\omega) - G(z)}{z - \omega} \right] \\ &= 1 + \frac{J}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th} \frac{\beta\omega}{2}}{z - \omega} [G_r(\omega) - G_a(\omega)] d\omega - \frac{J^2}{4} S(S+1) G^2(z) \\ &\equiv 1 + R(z) - \frac{J^2}{4} S(S+1) G^2(z)\end{aligned}\quad (28)$$

$$\equiv 1 + R(z) - \frac{J^2}{4} S(S+1) G^2(z) \quad (29)$$

(29) で  $R(z)$  の定義をした。今、

$$I_n(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th} \frac{\beta\omega}{2}}{z - \omega} [G_r^n(\omega) t_r(\omega) - G_a^n(\omega) t_a(\omega)] d\omega \quad (30)$$

なる定義を使えば、

$$\mathcal{J}_{\omega} \left( \frac{G(\omega) - G(z)}{z - \omega} t(\omega) \right) = I_1(z) - G(z) I_0(z) \quad (31)$$

$$\mathcal{J}_{\omega} \left( \frac{(G(\omega) - G(z))^2}{z - \omega} t(\omega) \right) = I_2(z) - 2G(z) I_1(z) + G^2(z) I_0(z) \quad (32)$$

となる。ここで、 $t_r$ ,  $t_a$  は、 $t$  に含まれる  $G$  を夫々  $G_r$ ,  $G_a$  に置きかえたものである。そこで、

$$1 \pm (G_r(z) - G_a(z)) t_{r,a}(z) = \frac{C(z)}{D_{r,a}(z)} \quad (33)$$

なる変換をすれば,

$$C(z) = 1 + R(z) - \frac{J^2}{4} S(S+1) G_r(z) G_a(z) + J [I_2 - (G_r + G_a) I_1 + G_r G_a I_0] \quad (34)$$

$$D_{r,a}(z) = 1 - \frac{J^2}{4} S(S+1) G_{r,a}^2(z) + R(z) + J [I_2(z) - 2 G_{r,a}(z) I_1(z) + G_{r,a}^2(z) I_0(z)] \quad (35)$$

となる, (34), (35) の解析的關係は,

$$C^+(z) - C^-(z) = R^+(z) - R^-(z) = -\frac{J}{2} \tanh \frac{\beta z}{2} (G_r(z) - G_a(z)) \quad (36)$$

$$D_{r,a}^+(z) - D_{r,a}^-(z) = (C^+(z) - C^-(z)) \frac{C^{+,+}(z)}{D_{a,r}^{-,+}} \quad (37)$$

となる。(36), (37) から,

$$\begin{aligned} D_r^+ D_a^+ - C^{+2}(z) + \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r(z) - G_a(z))^2 \\ = D_r^- D_a^- - C^{-2}(z) + \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r(z) - G_a(z))^2 \end{aligned} \quad (38)$$

なる關係が成立する。ここで、両辺の最後の項は、後で明らかなように、便宜的につけくわえた。

$$\begin{aligned} D_r D_a - C^2 + \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r - G_a)^2 \\ = (G_r(z) - G_a(z))^2 [(1+R(z)) I_0 + I_0 I_2 - I_1^2 - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (R(z) + I_2(z))] \end{aligned} \quad (39)$$

(39) 式は, (38) 式から cut にとびはなく, 実軸上で解析的である。(39) 式の右辺の square bracket は, 全平面で解析的で, 無限遠で消えるため, 一致の定理から, 一意的に 0 である。こうして,



北村豊幸

$$D_r^+ D_a^- = C^+ C^- - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r(z) - G_a(z))^2 \quad (40)$$

となり,  $z-M$ , で議論しているように,

$$D_r^+(z) = e^{-Q^+(z)}; \quad D_a^-(z) = e^{-Q^-(z)} \quad (41)$$

となる。ここで,

$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{z-\omega} \ell_n \left[ C^+(z) C^-(z) - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r(z) - G_a(z))^2 \right] \quad (42)$$

である。

(34) 式の右辺の  $I_n(z)$  を含む項は,  $r^3$  の order であり,  $r^2$  に比して無視することが出来る。 $\Delta$  について一次まで求めれば,

$$\begin{aligned} C^\pm(z) &= 1 + \frac{J}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th} \frac{\beta\omega}{2}}{z-\omega} (-2\pi i \rho(\omega) + \Delta^+ - \Delta^-) d\omega \\ &\quad - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (F_r \Delta^- + F_a \Delta^+ + F_r F_a) \\ &\equiv X^\pm(z) + Y^\pm(z) - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (F_r \Delta^- + F_a \Delta^+) \end{aligned} \quad (43)$$

ここで,

$$X^\pm(z) = 1 - \frac{J}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\omega)}{z-\omega} \text{th} \frac{\beta\omega}{2} d\omega - \frac{J^2 S(S+1)}{4} F_r F_a \quad (44)$$

$$Y^\pm(z) = \frac{J}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{th} \frac{\beta\omega}{2}}{z-\omega} (\Delta^+ - \Delta^-) d\omega \quad (45)$$

となる。

### § 3 $t(z)$

$Q(z)$  を求めるために, (42) 式の  $\ell_n$  の項から検討しよう。(43) 式を使って,

$$\begin{aligned}
 c^+ c^- &= \frac{J^2 S(S+1)}{4} (G_r(z) - G_a(z))^2 \\
 &= X^+ X^- + \pi^2 J^2 S(S+1) \rho^2(z) + \delta(z)
 \end{aligned} \quad (46)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 \delta(z) &= X^+ \left\{ Y^- - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (F_r \Delta^- + F_a \Delta^+) \right\} \\
 &\quad + X^- \left\{ Y^+ - \frac{J^2 S(S+1)}{4} (F_r \Delta^- + F_a \Delta^+) \right\} + i\pi J^2 S(S+1) \rho(\Delta^+ - \Delta^-)
 \end{aligned} \quad (47)$$

state density は (24) 式から、 $\omega < D$  の範囲では、変化が小さく、 $\rho(\omega) \sim \rho$  としてよく、 $\omega \gtrsim D$  の範囲においては、急激な phase modulation によって、きいてこない。この近似を使うならば、

$$X^\pm = r \left[ \ell_n \frac{T_K}{T} - g_\pm \left( \frac{\omega}{2\pi T} \right) \right]; \quad g_\pm(x) = \psi \left( \frac{1}{2} \mp ix \right) - \psi \left( \frac{1}{2} \right) \quad (48)$$

となる。ここで  $r = \rho J$ ,  $T_K$  は Kondo 温度,  $\psi(x)$  は digamma 関数である。

以下、簡単のため、 $|\tau| = |\ell_n T_K / T| \gg 1$  として、 $1/\tau$  で展開し、 $(1/\tau)^3$  の order まで計算する。

$$\begin{aligned}
 \ell_n (X^+ X^- + \pi^2 r^2 S(S+1) + \delta) \\
 &= 2 \ell_n r \tau - \frac{g_+ + g_-}{\tau} - \frac{g_+^2 + g_-^2}{2\tau^2} + \frac{\pi^2 S(S+1)}{\tau^2} - \frac{g_+^3 + g_-^3}{3\tau^3} \\
 &\quad + \frac{(g_+ + g_-) \pi^2 S(S+1)}{\tau^3} + \left( \frac{1}{r^2 \tau^2} + \frac{g_+ + g_-}{r^2 \tau^3} + \frac{g_+^2 + g_-^2 + g_+ g_- - \pi^2 S(S+1)}{r^2 \tau^4} \right) \delta(z)
 \end{aligned} \quad (49)$$

となる。 $Q^\pm(z)$  において、order parameter について、0 次の項、一次の項を夫々、 $K^\pm(z)$ ,  $L^\pm(z)$  とすれば、

北村豊幸

$$K^{\pm}(z) = \mp \ell_n r \tau \pm \frac{g_{\pm}}{\tau} \pm \frac{g_{\pm}^2}{2\tau^2} \mp \frac{\pi^2 S(S+1)}{2\tau^2} \pm \frac{g_{\pm}^3}{3\tau^3} \mp \frac{g_{\pm} \pi^2 S(S+1)}{\tau^3} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} L^{\pm}(z) = & \frac{1}{r\tau} \left( \mp Y^{\pm} + \frac{i\pi J r S(S+1)}{2} \Delta^{\pm} \right) \\ & + \frac{1}{r\tau^2} \left\{ -i\pi J S(S+1) \Delta^{\pm} \mp g_{\pm} Y^{\pm} - \frac{i\pi J r S(S+1)}{4} \right. \\ & \times \left. \left[ -g_{\pm} \Delta^{\pm} - g_{\pm} \Delta^{\pm} + 2\pi i T \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} - \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{r\tau^3} \left\{ \mp \pi^2 S(S+1) Y^{\pm} \mp g_{\pm}^2 Y^{\pm} + i\pi J S(S+1) \right. \\ & \times \left. \left[ -g_{\pm} \Delta^{\pm} - g_{\pm} \Delta^{\pm} + 2\pi i T \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} - \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) \right] \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

ここで,

$$\Delta^{\pm}(\omega) = \int K_0(\omega \pm i\delta) \Delta(r) d^3 r = \frac{\pi^2 \rho^2}{p_0^2} \int \frac{e^{\pm \frac{2i\omega \pm r}{V}}}{r^2} \Delta(r) d^3 r \quad (52)$$

であり,  $\Delta(n)$  は,  $\Delta^{\pm}(\omega)$  において,  $\omega$  を  $\pm i\omega_n = \pm i(2n+1)\pi T$  ( $n>0$ ) で置きかえたものである。 $\phi\left(\frac{1}{2} \mp \frac{i\omega}{2\pi T}\right)$  の pole は,  $\mp i\omega_n$  にあり, この留数は,  $\mp 2\pi iT$  である。又,

$$Y^{\pm}(z) = -JT \sum_n \frac{\Delta^{\pm}(z) - \Delta(n)}{Z - i\omega_n} \quad (53)$$

であり,  $Y^{\pm}(z)$  は, 夫々, 上半面, 下半面で解析的であることがわかる。

$\Delta(n)$  の定義と同様に,  $Y^{\pm}(z)$  の  $z$  を  $\pm i\omega_n$  (但し,  $n>0$ ) で置きかえたものを  $Y(n)$  と定義する。以下,  $K(n)$ ,  $g(n)$  についても同様に定義する。

次に,  $t_{r,a}(z)$  を (33) 式から求めると,

$$\begin{aligned} t_{r,a}(z) = & \pm \frac{1}{G_r - G_a} \left( \frac{G^{\pm}}{D_{r,a}} - 1 \right) \\ = & \mp \frac{1}{2\pi i \rho} (X^{\pm} e^{\pm k^{\pm}} - 1) \\ & \mp \frac{1}{2\pi i \rho} \left\{ \frac{\Delta^+ - \Delta^-}{2\pi i \rho} (X^{\pm} e^{\pm k^{\pm}} - 1) + \left\{ Y^{\pm} - \frac{i\pi J r S(S+1)}{4} (\Delta^+ - \Delta^-) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\times e^{\pm k^{\pm}} \pm X^{\pm} L^{\pm} e^{\pm k^{\pm}} \quad (54)$$

となり, 第一項は,  $\hat{t}_{11} = \hat{t}_{22}$ , 第二項は  $\hat{t}_{12} = \hat{t}_{21}$  である。ここで (50) (51) 式を使って, (54) 式を書き下せば,

$$\hat{t}_{11}^{r,a} = \pm \frac{S(S+1)}{\rho^2} \left( \frac{\pi\rho}{4i\tau^2} + \frac{\pi\rho g_{\pm}}{2i\tau^3} \right) \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \hat{t}_{12}^{r,a} = & + \frac{S(S+1)}{\rho^2} \left[ (\Delta^+ - \Delta^-) \left( \frac{1}{8\tau^2} + \frac{g_{\pm}}{4\tau^3} \right) - \left( \frac{r}{8\tau} + \frac{r}{8\tau^2} g_{\pm} \right) (\Delta^+ - \Delta^-) \right. \\ & \pm \frac{r}{4\tau} \Delta^{\pm} \mp \frac{1}{2\tau^2} \Delta^{\pm} + \frac{r}{8\tau^2} \{ -g_{\pm} \Delta^{\pm} - g_{\mp} \Delta^{\pm} + 2\pi i T \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} - \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) \} \\ & \left. + \frac{\pi\rho}{2i\tau^3} Y^{\pm} \pm \frac{1}{2\tau^3} \{ -g_{\pm} \Delta^{\pm} - g_{\mp} \Delta^{\pm} + 2\pi i T \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} + \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) \} \right] \quad (56) \end{aligned}$$

となる。

#### § 4 $\Delta(r)$ の積分方程式

$\Delta(r)$  の積分方程式は, I で求めたものを, 解析性を使って, contour integral に書きかえてやればよい。

$$\begin{aligned} \Delta(r) - gT \sum_n \int K(|\mathbf{r}-\mathbf{S}|, \omega_n) \Delta(S) d^3S \\ = - \frac{g}{4\pi i} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{\beta\omega}{2} (\hat{t}_{12}^{r+} K_0^+ - \hat{t}_{12}^{a-} K_0^-) d\omega \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{\beta\omega}{2} \left( \frac{\hat{t}_{11}^r}{F_r(\omega)} K_0^+ \Delta^+ - \frac{\hat{t}_{11}^a}{F_a(\omega)} K_0^- \Delta^- \right) d\omega \right] \quad (57) \end{aligned}$$

(57) 式の右辺第一項, 第二項は, 次のようになる。

$$\text{第一項} = \frac{S(S+1)}{\rho^2} \left[ - \left( \frac{r}{8\tau} - \frac{1}{8\tau^2} \right) T \sum_n \Delta(n) K(n) - \left( \frac{r}{8\tau} - \frac{1}{8\tau^2} \right) \frac{1}{4\pi i} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (\Delta^+ K^- - \Delta^- K^+) d\omega - \left( \frac{r}{8\tau^2} - \frac{1}{4\tau^3} \right) T \sum_n g(n) \Delta(n) K(n) \\
& - \left( \frac{r}{8\tau^2} - \frac{1}{4\tau^3} \right) \frac{1}{4\pi i} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (\Delta^+ K^- g^- - \Delta^- g^+ K^+) d\omega \\
& + \left( \frac{r}{4\tau} - \frac{1}{2\tau^2} \right) T \sum_n \Delta(n) K(n) + \frac{\pi \rho}{i r \tau^3} T \sum_{n>0} Y(n) K(n) \\
& + \left( \frac{r}{8\tau^2} - \frac{1}{2\tau^3} \right) T \sum_n g(n) \Delta(n) K(n) + \left\{ \left( \frac{r}{8\tau^2} - \frac{1}{2\tau^3} \right) \frac{1}{4\pi i} \times \right. \\
& \left. \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (g^- \Delta^+ K^+ - g^+ \Delta^- K^-) d\omega \right\} - \left\{ \left( \frac{r}{8\tau^2} - \frac{1}{2\tau^3} \right) \frac{T}{2} \times \right. \\
& \left. \sum_{n>0} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} - \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) (K_0^+ - K_0^-) d\omega \right\} \quad (58)
\end{aligned}$$

$$\text{第二項} = - \frac{S(S+1)}{\rho^2} T \sum_n \left( \frac{1}{4\tau^2} + \frac{g(n)}{2\tau^3} \right) \Delta(n) K(n) \quad (59)$$

(58) 式の右辺のうち、最後の二つの積分は、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi i} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (g^- \Delta^+ K^+ - g^+ \Delta^- K^-) d\omega \\
& = T \sum_n g(n) \Delta(n) K(n) + \\
& 4\pi T^2 \sum_{n, m>0} \left\{ \frac{\Delta(n) K(n) - \Delta(m) K(m)}{\omega_n - \omega_m} + \frac{\Delta(n) K(n) + \Delta(m) K(m)}{\omega_n + \omega_m} \right\} \quad (60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4\pi i} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z-i\omega_n} - \frac{1}{Z+i\omega_n} \right) \Delta(n) (K_0^+ - K_0^-) d\omega \\
& = 2T \sum_{n, m>0} \left( \frac{K(n) - K(m)}{i\omega_n - i\omega_m} \Delta(n) + \frac{K(n) + K(m)}{i\omega_n + i\omega_m} \Delta(n) \right) \quad (61)
\end{aligned}$$

と変換される。

今、積分方程式の第一次近似を求めるために、 $\Delta(r) = \Delta_0$  とすれば、

$$\langle K(n) \rangle = \frac{\pi \rho}{|\omega_n|} ; \quad \langle K_0^{\pm} \rangle = \pm \frac{\pi \rho}{\omega_{\pm}} i \quad (62)$$

となる。ここで、 $\langle f \rangle = \int f(r) d^3 r$  である。(62) 式を使えば

$$\frac{1}{4\pi i} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (\Delta^+ K^- - \Delta^- K^+) d\omega = T \sum \Delta(n) K(n) \quad (63)$$

となる。さらに、 $n, m$  を positive の場合、 $\Delta(m) = \Delta_0 \pi \rho / \omega_m$  であるから、部分分数分解を使って

$$\frac{\Delta(m)}{\omega_n + \omega_m} = \left( \frac{1}{\omega_m} - \frac{1}{\omega_m + \omega_n} \right) \Delta(n) \quad (64)$$

なる関係を考慮すれば、容易に、(60), (61) 式から、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi i} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} (g^- \Delta^+ K_0^+ - g^+ \Delta^- K^-) d\omega - \\ & \frac{T}{2} \int \text{th} \frac{\beta \omega}{2} \sum_{n>0} \left( \frac{1}{Z - i\omega_n} - \frac{1}{Z + i\omega_n} \right) \Delta(n) (K_0^+ - K_0^-) d\omega \\ & = T \sum_n g(n) \Delta(n) K(n) \end{aligned} \quad (65)$$

が導かれる。同様に、(64) 式の関係を使ってやれば、

$$\frac{\pi \rho}{i r \tau^3} T \sum_{n>0} Y(n) K(n) = - \frac{T}{\tau^3} \sum_{n>0} g(n) \Delta(n) K(n) \quad (66)$$

こうして、(57) 式の右辺は、 $\Delta(r) = \Delta_0$  の近似の範囲内で、

$$\text{第一項} + \text{第二項} = - \frac{S(S+1)}{\rho^2} \left( \frac{1}{2\tau^2} T \sum_n \Delta(n) K(n) + \frac{3}{2\tau^3} T \sum_n g(n) \Delta(n) K(n) \right) \quad (67)$$

となる。

I で考察したように、積分演算子  $L(r)$  を導入しよう。

$$L(r)\Delta(r) = \frac{1}{g\rho} (\Delta(r) - gT \sum_n \int K_0(|\mathbf{r}-\mathbf{S}|, \omega_n) \Delta(\mathbf{S}) d^3S) \quad (68)$$

今

$$\langle (L(r) + Z) \Delta(r) \rangle = 0 \quad (69)$$

のように、 $Z$ をとれば、 $\ell_n \frac{T_{c0}}{T_c} = Z$ として、遷移温度を決める式を得る。ここで  $T_{c0}$  は pure 状態の遷移温度である。

$$\Delta(r) = (1+f(r))\Delta_0 ; \quad \Delta(\infty) \equiv \Delta_0 \quad (70)$$

として、 $Z$ ,  $f(r)$  の第一次近似をとれば、 $T_c$  の極近傍での振舞いは、

$$\ell_n \frac{T_{c0}}{T_c} = \frac{\pi^2 S(S+1)}{vg\rho} T_c \sum_n \left( \frac{1}{2\tau^2} + \frac{3g(n)}{2\tau^3} \right) \frac{1}{|\omega_n|^2} \quad (71)$$

$$f(n) = \frac{\pi^2 S(S+1)}{g\rho} c T \sum_n \left( \frac{1}{2\tau^2} + \frac{3g(n)}{2\tau^3} \right) \frac{1}{|\omega_n|} \\ \times \left\{ \frac{v_F}{2|\omega_n|} \left( \frac{1}{r} e^{-\frac{2|\omega_n|r}{v_F}} - 1 \right) - E_1 \left( \frac{2|\omega_n|}{v_F} r \right) \right\} \quad (72)$$

となる。ここで、 $c = \frac{12}{(2\pi)^2 7\zeta(3)} \frac{m^2}{\xi_0^2}$  である。 $\zeta(x)$  は  $\zeta$ -関数である。

$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$  である。今、

$$\tau = \frac{1}{r} - \left[ \ell_n \frac{T}{D} + \text{const} \right] \quad (73)$$

を (71), (72) 式に代入し、 $r$  で展開すれば、 $r^2$  の項は Born 近似と一致する。(73) 式では、state density の  $\omega$ -dependence を neg. ったために、 $\omega$ -dependence が落ちているが、もし、

$$\tau = \frac{1}{r} - \left( \ell_n \frac{(2n+1)\pi T}{D} - g(n) \right) \quad (74)$$

として,  $\omega_n$  - dependence を入れてやれば,  $r^3$  の項も I で求めたものに一致する。

## § 5 結 論

$|\tau| = |\ell n \frac{T_K}{T}| \gg 1$  の場合,  $(\frac{1}{r})^3$  の order までを, いわば exact に求めた。この範囲においては, Zuckermann<sup>8)</sup> の結果と一致する。即ち,  $T_K \gg T_C$  の場合, spin quenching が起って, impurity spin の影響は小さくなるとは言え, この場合の方が  $T_K \ll T_C$  の場合より,  $T_C$  の減少が若干大きいことを示している。従って, order parameter の減少も, 前者の方が大きいことを示している。

$T_K \sim T_C$  の近傍で発散しているが, 高次の項を検討すれば, 発散はおさえられ,  $T_C$  の減少の  $T_K$  依存性は Zuckermann の結果を示唆している。このことは検討に値する。

今までの議論は,  $T_C$  の極近傍の話であるが,  $T < T_C$  の場合の order parameter の空間的变化の検討は残された問題である。 $\Delta(r)$  の  $\xi_0 \gtrsim r$  の振舞いも興味があり, 検討する必要がある。

最後に, 始終御指導していただいた高野文彦先生に感謝します。

## 参 考 文 献

- 1) 北村豊幸 物性研究 10 431 ('68) 以下, I と記す。
- 2) 北村豊幸 物性研究 11 93 ('68)
- 3) 川村 清 物性研究 10 282 ('68)
- 4) P.E. Bloomfield & D.R. Hamann Phys. Rev. 164 856 ('67)
- 5) J. Zittartz & E. Müller Hartmann Z. Physik 212 380 ('68)  
以下, Z-M. と記す。
- 6) F. Takano & S. Matayoshi Prog. Theor. Phys. 41 45 ('69)
- 7) J. Kondo private communication
- 8) M.J. Zuckermann Phys. Rev. 168 390 ('68)
- 9) J. Heinrichs Phys. Rev. 168 451 ('68)